数理解析研究所講究録
864巻 1994年 164-173


# 縄張りの情報ゲームについて

大阪府立大・総科　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
三菱重工業（株）　山田康吉 (Yasuyosi Yamada)

## 1. モデル

ここで取扱う問題は，ある商品に対して市場を独占している２企業間の対立をある側面からモデル化し，２人非０和ゲームとして解析しようとするものである。

ある商品で市場を複占している２企業 (Player I, II) がこの市場の独占を目的として対立している。両者は各々の立場から，与えられた区間 $[0, r]$ のどの時点までこの対立におけるにらみ合いを持続すべきか，を決めなければならない。より長く頑張った方が勝ちであり，この市場の価値 $V$ を手に入れることができる。しかしながら，このにらみ合いを時刻 $t \in [0, r]$ まで維持するためには I, II はそれぞれ $h_1(t)$, $h_2(t)$ の費用を費やさなければならない。ここで，にらみ合いというのは，新しい型の製品の開発研究であるかもしれないし，小売店への売り込み競争であるかもしれない。そこで

$h_i(t)$ は $h_i(0)=0$ で微分可能かつ $h_i'(t)>0$ for $t\in(0,r)$ であると仮定する $(i=1,2)$．そして，もし両者が共に $r$ より前の同時刻でにらみ合いを断念しそれを相手に通告したときにはこの $V$ を I と II はそれぞれ $p:q$ の比で分け合い，両者共に上限の $r$ まで断念しなかったときは決戦となる．決戦となった場合，勝者は価値 $V$ を手に入れることができるが，敗者は価値 $C$ を失うこととなる．I が勝つ（II が負ける）確率は $p$ であり，II が勝（I が負ける）確率は $q$ である．ここに $p>0$, $q>0$ かつ $p+q=1$ を仮定する．各 player は互に相手がどう振舞うかを考えに入れた上での最適停止時刻を決定しなければならない．

このような問題にあっては，両 player にとって利用できる情報様式に2つの型がある．自分の行動が常に相手に観測されどの時刻においても自分がまだ頑張っているのかもう既に断念してまったのかが情報として相手に知らされる player を Noisy player と呼ぶ．反対に自分の行動を相手に観測されない状態にしており，そのため相手は何の情報もない中で $[0,r)$ のどの時点まで頑張るかをあらかじめ決定し，その計画時間が実現されてみてはじめて自分がどの時点で断念したのかあるいはまだ頑張っているのかが相手に知らさる，その上両者共上限の $r$ まで頑張っていた時には $r$ でそのことが相手に学

習されるplayerを Silent Playerと呼ぶ。

ここでは，Player I は Silent Playerであり，逆に Player II は Noisy Player となっている非対称な情報構造をもつゲームを取扱う。

ここで，$[0,r]$上のcdfs $F(\cdot)$ と $G(\cdot)$ および $[0,r]\times[0,r]$ 上の実数値関数 $M(x,y)$ に対して，以下のような期待値に関する記号を導入する：

$$M(F,y)=\int_0^r M(x,y)\,dF(x)\ ;\quad M(x,G)=\int_0^r M(x,y)\,dG(y)$$

$$M(F,G)=\int_0^r\int_0^r M(x,y)\,dF(x)\,dG(y).$$

## 2. 定式化と解析

このゲームの純戦略を Player I にとっては $x\in[0,r]$，II にとっては $y\in[0,r]$ とする。そうすると Player $i$ にとっての利得関数 $M_i(x,y)$ は次のように与えられる（$i=1,2$）：

$$(1)\qquad M_1(x,y)=\begin{cases} -h_1(x), & x<y \\ pV-h_1(x), & x=y<r \\ pV-qC-h_1(r), & x=y=r \\ V-h_1(y), & x>y \end{cases};$$

$$(2)\qquad M_2(x,y)=\begin{cases} -h_2(y), & y<x \\ qV-h_2(y), & y=x<r \\ qV-pC-h_2(r), & y=x=r \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \\ V - h_2(x), & y > x. \end{array} \right.$$

このゲームにおいては，純戦略の中に平衡戦略は存在しない。そこで Player I, II の混合戦略をそれぞれ以下のように想定し，その中から平衡戦略をみつけ出すこととする。

Player I の混合戦略 $F(x)$ は，点 $x=0$ での mass part $\alpha_0 \geqq 0$，区間 $(0, u)$ 上での density part $f(x) \geqq 0$，および点 $u$ での mass part $\alpha_u \geqq 0$ とで構成される $[0, r]$ 上の cdf でである。ここに，$0 < u \leqq r$ とする。

Player II の混合戦略 $G(y)$ は，点 $y=0$ での mass part $\beta_0 \geqq 0$，区間 $(0, u)$ 上での density part $g(y) \geqq 0$，および点 $u$ での mass part $\beta_u \geqq 0$ とで構成される $[0, r]$ 上での cdf である。同様にして，$0 < u \leqq r$ としておく。

そうすると

$$(3)\quad M_2(F, y) = \begin{cases} \alpha_0 \ell V + \{-h_2(y)\}\{1 - F(0)\} = \alpha_0 \ell V, & y = 0 \\ \alpha_0 V + \int_0^y \{V - h_2(x)\} f(x)\,dx \\ \qquad + \int_y^u \{-h_2(y)\} f(x)\,dx + \alpha_u \{-h_2(y)\}, & 0 < y < u \\ \alpha_0 V + \int_0^u \{V - h_2(x)\} f(x)\,dx \\ \qquad + \alpha_u \{V - h_2(u)\}, & u < y < r \\ \alpha_0 V + \int_0^u \{V - h_2(x)\} f(x)\,dx \\ \qquad + \alpha_u \ell V - h_2(u), & y = u < r \\ \alpha_0 V + \int_0^r \{V - h_2(x)\} f(x)\,dx \\ \qquad + \alpha_r (\ell V - pC) - h_2(r), & y = u = r \end{cases}$$

となるから

$$M_2(F, y) = v_2^0 \quad \text{for all } y \in (0, u)$$

を解き, normarization condition $\int_0^u f(t)dt = 1-\alpha_0-\alpha_u$ とで

$$(4) \quad f(t) = k_1 \frac{h_2'(t)}{V} e^{-\frac{h_2(t)}{V}}, \qquad \text{for } t \in (0, u)$$

$$\text{ここに } k_1 = (1-\alpha_0-\alpha_u) / \{1 - e^{-\frac{h_2(u)}{V}}\}$$

を得る.

まったく同様にして, 今度は

$$M_1(x, G) = \begin{cases} \beta_0 \rho V, & x = 0 \\ V\{\beta_0 + \int_0^x g(y)dy\} - h_1(x), & 0 < x < u \\ V - h_1(x), & u < x < r \\ V\{\beta_0 + \int_0^u g(y)dy\} + \beta_u \rho V - h_1(u), & y = u < r \\ V\{\beta_0 + \int_0^r g(y)dy\} + \beta_u(\rho V - \ell C) - h_1(r), & y = u = r \end{cases}$$

が得られ, その結果

$$(5) \quad g(t) = h_1'(t) / V, \quad \text{for all } x \in (0, u)$$

も得られる.

それぞれ (3) と (4) を density parts とする cdf.s $F(x)$ と $G(y)$ に対して

$$(6) \quad M_2(F, y) = \begin{cases} \alpha_0 \ell V, & y = 0 \\ \alpha_0 V, & 0 < y < u \\ \alpha_0 V + \alpha_u \ell V, & y = u < r \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\overline{V} - h_2(y), & u < y < r \\
\alpha_0 \overline{V} + \alpha_r(\delta \overline{V} - pC), & y = u = r
\end{cases}
$$

および

$$
(7)\quad M_1(x, G) = \begin{cases}
\beta_0 p \overline{V}, & x = 0 \\
\beta_0 \overline{V}, & 0 < x < u \\
\beta_0 \overline{V} + \beta_u p \overline{V}, & x = u < r \\
\overline{V} - h_1(x), & u < x < r \\
\beta_0 \overline{V} + \beta_r(p\overline{V} - \delta C), & x = u = r
\end{cases}
$$

が成立する.

そこで今, $u_1 = h_2^{-1}(\overline{V})$; $u_2 = h_1^{-1}(\overline{V})$ と選び

$$r < \min(u_1, u_2), \quad r \geqq \min(u_1, u_2)$$

の2つの場合に分けて考える. また $u_1 \leqq u_2$ さらに $p \geqq \frac{1}{2}$ すなわち $p \geqq \delta$ を仮定する.

2.1 $r \geqq \min(u_1, u_2)$ の場合

$u = u_1 \leqq u_2$ とすると, $\beta_0 = \beta_u = 0$ となり, したがって

$$(8)\quad G^0(y) = h_1(y)/\overline{V}, \qquad 0 \leqq y \leqq u$$

となって

$$
M_1(x, G^0) = \begin{cases}
0, & 0 \leqq x \leqq u \\
\overline{V} - h_1(x) < 0, & x \geqq u,
\end{cases}
$$

すなわち, Player II が $G^0(y)$ とる限り, I は $[0, u]$ 内の $x$ に限定されてしまうことになる. そこで

$$(9)\quad F^{\circ}(x)=\begin{cases}\int_0^1 \frac{h_2'(t)}{V}e^{-\frac{h_2(t)}{V}}dt+e^{-\frac{h_2(1)}{V}}I_u(x), & 0\leqq x\leqq u\\ 1, & x>u\end{cases}$$

と選ぶと

$$(10)\quad \begin{cases}M_1(F,G^{\circ})\leqq M_1(F^{\circ},G^{\circ})=0\\ M_2(F^{\circ},G^{\circ})=0\end{cases}$$

が成立する。

2．2　$r<\min(u_1,u_2)$ の場合

この時 (4) を density part にもつ cdf $F(x)$ は

$$M_2(F,y)=\begin{cases}\alpha_0\xi V, & y=0\\ \alpha_0V+h_2(y)\{k_1e^{-\frac{h_2(r)}{V}}-\alpha_r\}, & 0<r<r\,;\\ \alpha_0V+k_1h_2(r)e^{-\frac{h_2(r)}{V}} & \\ \qquad +\alpha_r\{\xi V-pC-h_2(r)\}, & y=r\end{cases}$$

を満足する。したがって

$$(11)\qquad \alpha_r=k_1e^{-\frac{h_2(r)}{V}}$$

と選ぶと

$$M_2(F,y)=\begin{cases}\alpha_0\xi V\leqq\alpha_0V, & y=0\\ \alpha_0V, & 0<y<r\\ \alpha_0V+\alpha_r(\xi V-pC), & y=r\end{cases}$$

が得られる。

同様にして (5) を density part にもつ cdf $G(y)$ を $M_1(x,y)$ に適用すると

$$M_1(x,G)=\begin{cases}\beta_0 pV, & x=0\\ \beta_0 V & 0<x<r\\ \beta_0 V+\beta_r(pV-qC), & x=r\end{cases}$$

が得られる．したがって (4) と (11) で特徴づけられる cdf $F(x)$ と (5) の density part を持つ $G(y)$ に対して

$$(12)\quad\begin{cases}M_2(F,G)=\alpha_0\{\beta_0 qV+(1-\beta_0)V\}+\alpha_r\beta_r(qV-pC)\\ M_1(F,G)=\beta_0\{\alpha_0 pV+(1-\alpha_0)V\}+\beta_r\alpha_r(pV-qC)\end{cases}$$

が成立する．上記の2つの式を観察すると，$\alpha_0,\beta_0,\alpha_r,\beta_r$ を決定することは，次の3×3双行列ゲームにおける平衡点を求めることと同じであることがわかる．このゲームの混合戦略は I にとっては $\langle\alpha_0, 1-\alpha_0-\alpha_r, \alpha_r\rangle$ であり，II には $\langle\beta_0, 1-\beta_0-\beta_r, \beta_r\rangle$ である．

| I ＼ II | $y=0$ | $0<y<r$ | $y=r$ |
|---|---|---|---|
| $x=0$ | $pV,\ qV$ | $0,\ V$ | $0,\ V$ |
| $0<x<r$ | $V,\ 0$ | $0,\ 0$ | $0,\ 0$ |
| $x=r$ | $V,\ 0$ | $0,\ 0$ | $pV-qC,\ qV-pC$ |

## 3. 主要結果

前節の解析より，次の定理を得る．

定理　$p\geq\frac{1}{2}$ とし，$u_1=h_2^{-1}(V)$; $u_2=h_1^{-1}(V)$ とする．そして $u=\min(u_1,u_2)$ と置くと 以下のような事柄が成立する．

(i) $r \geqq u$ の場合

$$F^{0}(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{0}^{x}\frac{h_2'(t)}{V}e^{-\frac{h_2(t)}{V}}dt+e^{-\frac{h_2'(u)}{V}}I_u(x), & 0\leqq x\leqq u\\ 1, & u\leqq x\leqq r\end{cases};$$

$$G^{0}(y)=\begin{cases}\{h_1(y)/V\}+[1-\{h_1(u)/V\}]I_u(y), & 0\leqq y\leqq u\\ 1, & u\leqq y\leqq r\end{cases}$$

とせよ．そうすると，

$u_1\leqq u_2$ に対しては

$$\begin{cases}M_1(F^{0},G^{0})=0\\ M_2(F^{0},G)\leqq M_2(F^{0},G^{0})=0\end{cases}$$

$u_2\leqq u_1$ に対しては

$$\begin{cases}M_1(F,G^{0})\leqq M_1(F^{0},G^{0})=0\\ M_2(F^{0},G^{0})=0\end{cases}$$

が成立する．$I_u(z)$ は $z=u$ での unit-step function.

(ii) $r<u$ の場合．まず Player I の混合戦略として

$$F^{0}(x)=\int_{0}^{x}\frac{h_2'(t)}{V}e^{-\frac{h_2(t)}{V}}dt+e^{-\frac{h_2'(\delta)}{V}}I_\delta(x),\quad 0\leqq x\leqq \delta$$

$$F^{1}(x)=1,\quad 0\leqq x\leqq r$$

$$F^{*}(x)=\begin{cases}\dfrac{pC-\delta V}{pV+(pC-\delta V)}, & x=0\\ \dfrac{(pC-\delta V)+pV\left(\displaystyle\int_{0}^{x}\frac{h_2'(t)}{V}e^{-\frac{h_2(t)}{V}}dt+e^{-\frac{h_2(\delta)}{V}}I_\delta(x)\right)}{pV+(pC-\delta V)}, & 0<x\leqq\delta\end{cases}$$

を与える．次に Player II の混合戦略として

$$G^{0}(y)=\{h_1(y)/V\}+[1-\{h_1(r)/V\}]I_r(y),\quad 0\leqq y\leqq r$$

$$G^{1}(y)=1,\quad 0\leqq y\leqq r$$

$$G^*(y)=\begin{cases}\dfrac{qC-pV}{qV+(qC-pV)}, & y=0\\[2ex] \dfrac{(qC-pV)+qV\left[\dfrac{h_1(y)}{V}+\left\{1-\dfrac{h_1(r)}{V}\right\}I_r(y)\right]}{qV+(qC-pV)}, & 0<y\leq r\end{cases}$$

を与える。$I_r(z)$ は $z=r$ における unit-step function.

そうすると、$0\leqq\frac{C}{V}\leqq\frac{q}{p}$ ならば $(F^0(x), G^0(y))$ が、$\frac{q}{p}<\frac{C}{V}\leqq\frac{p}{q}$ ならば $(F^0(x), G^1(y))$ が (1) と (2) で与えられるゲームの1つの平衡点となり、さらに $\frac{C}{V}>\frac{p}{q}$ とすると、$(F^0(x), G^1(y))$, $(F^1(x), G^0(y))$, $(F^*(x), G^*(y))$ のそれぞれが1つの平衡点を形成する。

参考文献

[1] Y. Teraoka, A game theory for a duopolistic territory, Preceeding of Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology & Management, 552-559, 1993.